

DAS PASCALSCHES DREIECK UND DER BINOMISCHE LEHRSATZ

STILIANOS LOUCA

1. EINFÜHRUNG

Als Pascalsches Dreieck wird die folgende Anordnung von natürlichen Zahlen bezeichnet:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{array}$$

wobei das Element $E_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, die j -te Zahl in der i -ten Zeile ist.

Es gilt:

$$E_{i,j} = \begin{cases} E_{i-1,j-1} + E_{i-1,j} & : 1 \leq j \leq i \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

2. BINOMIAL-KOEFFIZIENTEN

Es gilt folgendes auf den ersten Blick verblüfendes Verhältniss:

$$\binom{n}{k} = E_{n,k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0$$

Proof.

Induktionsanfang :

$$\binom{0}{0} = 1 = E_{0,0}$$

Induktionsannahme :

$$\binom{n}{k} = E_{n,k}$$

Induktionsschritt : $n \rightarrow n + 1, k \rightarrow k + 1$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot [(n-k+1) + k]}{k! \cdot (n-k+1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = E_{n,k} + E_{n,k-1} = E_{n+1,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n! \cdot [(n-k-1) + (k+1)]}{n \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-k-1)}{n \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{n \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k+1)! \cdot (n-k-2)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} = E_{n-1,k+1} + E_{n-1,k} = E_{n,k+1} \end{aligned}$$

□

3. BINOMISCHER LEHRSATZ

Es gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Proof.

Induktionsanfang :

$$(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{-k} b^k$$

Induktionsannahme :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^k$$

Induktionsschritt :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \cdot (a + b)^n = \sum_{k=0}^n E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \left(E_{n,0} \cdot a^{n+1} + \sum_{k=1}^n E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k \right) + \left(E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^{k+1} \right) \\ &= E_{n,0} \cdot a^{n+1} + E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^n E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n E_{n,k-1} \cdot a^{n+1-k} b^k \\ &= E_{n,0} \cdot a^{n+1} + E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^n [E_{n,k} + E_{n,k-1}] \cdot a^{n+1-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} [E_{n,k} + E_{n,k-1}] \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} E_{n+1,k} \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} b^k \end{aligned}$$

□